Marius PERIANU
Ioan BALICA
Paula BALICA

ESENȚIAL
Matematică
clasa a VII-a

I

art educațional

Prezentul auxiliar a fost avizat de Ministerul Educației Naționale prin Ordinul nr. 3022 din 08.01.2018 și se regăsește la poziția nr. 249 din anexa Ordinului.

Această lucrare a fost realizată în conformitate cu programa școlară în vigoare, aprobată prin ordinul ministrului educației, cercetării și inovării nr. 5097/09.09.2009.

Referenți științifici:
prof. drd. Livia Harabagiu
prof. gr. I Costel Anghel

Tehnoredactare:
Cornel Drăghia

Coperta:
Alexandru Daș

ISBN general: 978-606-003-071-3

ISBN semestrul I: 978-606-003-070-6

Pentru comenzi vă puteți adresa
Departamentului Difuzare
C.P. 12, O.P. 63, sector 1, București
Telefoane: 0744.634.719; 0751.281.774; 021.796.73.83; 021.796.73.80
Fax: 021.369.31.99
www.art-educational.ro

Cuprins

GEOMETRIE

Capitolul 3. Patrulatere

Capitolul 4. Asemănarea triunghiurilor

CAPITOLUL 1

NUMERE RAŢIONALE

1.1. Mulţimea numerelor raţionale.
Forme de scriere a numerelor raţionale

1.2. Reprezentarea numerelor raţionale pe axa numerelor. Compararea numerelor raţionale

Teste de evaluare

Fişă pentru portofoliul individual (A1)

1.3. Adunarea şi scăderea numerelor raţionale

1.4. Înmulţirea şi împărţirea numerelor raţionale

1.5. Puterea cu exponent întreg a unui număr raţional

1.6. Ordinea efectuării operaţiilor cu numere raţionale

Teste de evaluare

Fişă pentru portofoliul individual (A2)

1.7. Ecuaţii cu coeficienţi raţionali

1.8. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuaţiilor

Teste de evaluare

Fişă pentru portofoliul individual (A3)

1.9. Probleme cu caracter aplicativ

Competenţe specifice vizate

1. Identificarea caracteristicilor numerelor raţionale şi a formelor de scriere a acestora în contexte variate;
2. Aplicarea regulilor de calcul cu numere raţionale, a estimărilor şi a aproximărilor pentru rezolvarea unor ecuaţii;
3. Utilizarea proprietăţilor operaţiilor în efectuarea calculelor cu numere raţionale;
4. Caracterizarea mulţimilor de numere şi a relaţiilor dintre acestea utilizând limbajul logicii matematice şi teoria mulţimilor;
5. Determinarea regulilor eficiente de calcul în efectuarea operaţiilor cu numere raţionale;
6. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea operaţiilor cu numere raţionale şi a ordinii efectuării operaţiilor.

CAPITOLUL 1 Numere raţionale

1.1. Mulţimea numerelor raţionale. Forme de scriere a numerelor raţionale

Număr raţional. Un număr x se numeşte *număr raţional* dacă există o pereche de numere întregi (a,b) cu $b \neq 0$, astfel încât $x = \frac{a}{b}$. Mulțimea numerelor raționale se notează cu $\mathbb{Q}$ şi poate fi definită astfel: $\mathbb{Q} = \left\{ x \;\middle|\; \exists\, a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, \text{ astfel încât } x = \frac{a}{b} \right\}$.

Observaţii. 1. Are loc incluziunea $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

2. $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ este *mulțimea numerelor raționale nenule.*

3. $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_+$, unde $\mathbb{Q}_+$ reprezintă mulțimea numerelor raționale pozitive, iar $\mathbb{Q}_-$ mulțimea numerelor raționale negative.

Forme de scriere a numerelor raţionale.

Un număr rațional poate fi reprezentat prin *fracții ordinare echivalente* sau printr-o *fracție zecimală finită* sau *periodică.*

Teoremă. Pentru orice număr rațional nenul q există o *unică fracție ireductibilă* $\frac{a}{b}$, cu $a \in \mathbb{Z}$ şi $b \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $q = \frac{a}{b}$.

Transformarea fracțiilor ordinare în fracții zecimale

Un număr rațional pozitiv reprezentat printr-o fracție ireductibilă $\frac{a}{b}$, cu a, $b \in \mathbb{N}^*$, $b \geq 2$, se transformă, folosind algoritmul de împărțire a numerelor naturale, în:

a. fracție zecimală finită dacă descompunerea lui b în produs de factori primi conține numai factorii 2 sau 5.

b. fracție periodică simplă dacă descompunerea lui b în produs de factori primi nu conține nici factorul prim 2, nici factorul prim 5.

c. fracție periodică mixtă dacă descompunerea lui în factori primi b conține cel puțin unul din factorii primi 2 și 5 și cel puțin un alt factor prim diferit de 2 și de 5.

Exemple.

a. fracții zecimale *finite*: $\frac{37}{8} = \frac{37}{2^3} = 4{,}625$; $\frac{187}{50} = \frac{187}{2 \cdot 5^2} = 3{,}74$;

b. fracții zecimale *periodice simple*: $\frac{138}{9} = \frac{138}{3^2} = 15{,}(3)$; $\frac{67}{33} = \frac{67}{3 \cdot 11} = 2{,}(03)$;

c. fracții zecimale *periodice mixte*: $\frac{1}{55} = \frac{1}{5 \cdot 11} = 0{,}0(18)$; $\frac{503}{12} = \frac{503}{2^2 \cdot 3} = 41{,}9(6)$.

Transformarea fracțiilor zecimale în fracții ordinare

a. transformarea fracțiilor zecimale finite în fracții ordinare:

$$\overline{a_0,a_1a_2\ldots a_n} = a_0\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_n}}{10^n} = \frac{\overline{a_0a_1a_2\ldots a_n}}{10^n}$$

b. transformarea fracțiilor zecimale periodice simple în fracții ordinare:

$$\overline{a_0,(a_1a_2\ldots a_p)} = a_0\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_p}}{\underbrace{99\ldots9}_{p\text{ cifre}}}$$

c. transformarea fracțiilor zecimale periodice mixte în fracții ordinare:

$$\overline{a_0,a_1a_2\ldots a_n(b_1b_2\ldots b_p)} = a_0\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_nb_1b_2\ldots b_p} - \overline{a_1a_2\ldots a_n}}{\underbrace{99\ldots9}_{p\text{ cifre}}\underbrace{00\ldots0}_{n\text{ cifre}}}$$

Exemple. **a.** $15,34 = 15\frac{34}{100} = \frac{1534}{100}$; $0,8 = \frac{8}{10}$; $6,534 = \frac{6534}{1000}$.

b. $0,(17) = \frac{17}{99}$; $5,(8) = 5\frac{8}{9}$; $403,(295) = 403\frac{295}{999}$.

c. $2,5(13) = 2\frac{513-5}{990} = 2\frac{508}{990}$; $0,27(568) = \frac{27568-27}{99900} = \frac{27541}{99900}$

CUNOAŞTERE ŞI EXERSARE

1. Scrieți:
- trei exemple de numere naturale:
- trei exemple de numere întregi pozitive:
- trei exemple de numere întregi negative:

2. 3,2 este un număr rațional, reprezentat sub formă de fracție zecimală. Scrieți alte cinci exemple de numere raționale, reprezentate sub formă de fracție zecimală.

Rezolvare. 4,19;

3. $\frac{3}{4}$ este un număr rațional, reprezentat sub formă de fracție ordinară. Scrieți alte cinci exemple de numere raționale, reprezentate sub formă de fracție ordinară.

Rezolvare. $\frac{12}{7}$;

4. Un exemplu de fracție ordinară ce nu se mai poate simplifica este $\frac{15}{11}$, numită fracție ireductibilă. Scrieți alte cinci exemple de fracții ireductibile.

Indicație. Puteți alege numărătorul și numitorul numere naturale consecutive, astfel fracția va fi în mod sigur ireductibilă. ☺

Rezolvare.

5. Un exemplu de număr rațional negativ este $-12,5$, acesta fiind reprezentat sub formă de fracție zecimală. Un alt exemplu este $-\frac{2}{9}$, fiind reprezentat sub formă de fracție ordinară. Scrieți alte cinci exemple de numere raționale negative, pentru fiecare dintre cele două moduri de scriere.

Rezolvare.

6. Putem afirma despre numărul 7 că este natural. De asemenea putem afirma că 7 este și număr întreg, și număr rațional. Există însă numere care sunt întregi, dar nu sunt naturale, de exemplu -9 (sau orice alt număr întreg negativ), așa cum există numere care sunt raționale, dar nu sunt întregi, de exemplu $\frac{4}{3}$.

a) Scrieți cinci exemple de numere întregi care sunt și naturale.

Rezolvare.

b) Scrieți cinci exemple de numere întregi care nu sunt și naturale.

Rezolvare.

c) Scrieți cinci exemple de numere raționale care nu sunt și întregi.

Rezolvare.

7. Scrieți în dreptul fiecărei propoziții de mai jos „A", dacă propoziția este adevărată, respectiv „F", dacă propoziția este falsă:

a) $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$; *b)* $-\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$; *c)* $\frac{11}{7} \in \mathbb{Z}$; *d)* $-2 \in \mathbb{Z}$; *e)* $\frac{9}{11} \in \mathbb{Q}$;

f) $-\frac{4}{5} \notin \mathbb{Q}$; *g)* $-21 \in \mathbb{N}$; *h)* $3 \notin \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$; *i)* $-\frac{3}{14} \notin \mathbb{Q}$; *j)* $\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$.

8. Cu cifrele 3, 5 și 8, luate o singură dată, se pot forma următoarele numere raționale, scrise sub formă de fracție ordinară: $\frac{3}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{3}, \frac{5}{8}, \frac{8}{3}, \frac{8}{5}$.

Având la dispoziție cifrele 4, 9 și 8, scrieți toate numere raționale, sub formă de fracție ordinară, ce se pot forma (fiecare cifră va fi luată o singură dată).

9. Cu numerele 3, 5 și 8, luate o singură dată, se pot forma următoarele numere raționale, neîntregi, scrise sub formă de fracție zecimală: 3,58; 3,85; 5,38; 5,83; 8,35; 8,53; 35,8; 38,5; 53,8; 58,3; 83,5; 85,3.

Având la dispoziție cifrele 1, 4 și 7, scrieți toate numere raționale, neîntregi, sub formă de fracție zecimală, ce se pot forma (fiecare cifră va fi luată o singură dată).

ACUMULARE ŞI CONSOLIDARE

10. Determinaţi elementele mulţimii: $A=\left\{x=\frac{a}{b}\ \middle|\ a\in\{2,3,4\} \text{ şi } b\in\{5,6\}\right\}$.

11. Transformaţi următoarele fracţii ordinare în fracţii zecimale:

a) $\frac{13}{10}$; *b)* $\frac{156}{10}$; *c)* $\frac{567}{10}$; *d)* $\frac{256}{100}$; *e)* $\frac{13}{100}$;
f) $\frac{1451}{100}$; *g)* $\frac{33}{1000}$; *h)* $\frac{3588}{1000}$; *i)* $\frac{4}{10000}$; *j)* $\frac{10}{10000}$.

12. Transformaţi următoarele fracţii ordinare în fracţii zecimale, amplificându-le, eventual, convenabil:

a) $\frac{2}{5}$; *b)* $\frac{3}{5}$; *c)* $\frac{7}{5}$; *d)* $\frac{9}{25}$; *e)* $\frac{13}{4}$;
f) $\frac{21}{4}$; *g)* $\frac{3}{50}$; *h)* $\frac{1}{125}$; *i)* $\frac{5}{16}$; *j)* $\frac{9}{16}$.

Rezolvare. *a)* ${}^{2)}\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=0,4$; *e)* ${}^{25)}\frac{13}{4}=\frac{325}{100}=3,25$.

13. Transformaţi următoarele fracţii ordinare în fracţii zecimale, simplificându-le, eventual, mai întâi:

a) $\frac{16}{20}$; *b)* $\frac{18}{20}$; *c)* $\frac{45}{50}$; *d)* $\frac{128}{400}$; *e)* $\frac{15}{30}$;
f) $\frac{18}{200}$; *g)* $\frac{160}{50}$; *h)* $\frac{12}{30}$; *i)* $\frac{24}{300}$; *j)* $\frac{25}{500}$.

Rezolvare. *c)* $\frac{45}{50}^{(5}=\frac{9}{10}=0,9$; *i)* $\frac{24}{300}^{(3}=\frac{8}{100}=0,08$.

14. Reprezentaţi următoarele numere raţionale sub formă de fracţie zecimală finită:

a) $\frac{5}{2}$; *b)* $\frac{9}{2}$; *c)* $\frac{25}{2}$; *d)* $\frac{9}{4}$; *e)* $\frac{13}{4}$;
f) $\frac{23}{4}$; *g)* $\frac{6}{5}$; *h)* $\frac{12}{5}$; *i)* $\frac{51}{25}$; *j)* $\frac{41}{20}$.

Indicaţie. Împărţiţi numărătorul la numitor şi veţi obţine rezultatul cerut.

Rezolvare. *f)* $\frac{23}{4}=5,75$, deoarece $23:4=5,75$.

15. Reprezentaţi următoarele numere raţionale sub formă de fracţie zecimală periodică simplă:

a) $\frac{1}{3}$; *b)* $\frac{5}{3}$; *c)* $\frac{7}{3}$; *d)* $\frac{35}{3}$; *e)* $\frac{13}{9}$;
f) $\frac{20}{9}$; *g)* $\frac{40}{9}$; *h)* $\frac{100}{9}$; *i)* $\frac{100}{27}$; *j)* $\frac{200}{27}$.

● Marius PERIANU • Ioan BALICA • Paula BALICA

Rezolvare. *d)* $\frac{35}{3}=11,(6)$, deoarece $35:3=11,666...=11,(6)$;
j) $\frac{200}{27}=7,(407)$, deoarece $200:27=7,407407...=7,(407)$.

16. Reprezentaţi următoarele numere raţionale sub formă de fracţie zecimală periodică mixtă:

a) $\frac{7}{6}$; *b)* $\frac{25}{6}$; *c)* $\frac{35}{6}$; *d)* $\frac{19}{12}$; *e)* $\frac{31}{12}$;
f) $\frac{29}{15}$; *g)* $\frac{32}{15}$; *h)* $\frac{41}{18}$; *i)* $\frac{101}{45}$; *j)* $\frac{37}{36}$.

Rezolvare. *b)* $\frac{25}{6}=4,1(6)$, deoarece $25:6=4,1666...=4,1(6)$;
i) $\frac{101}{45}=2,2(4)$, deoarece $101:45=2,2444...=2,2(4)$.

17. Reprezentaţi sub formă de fracţie ordinară fiecare dintre numerele următoare:
a) 0,1; *b)* 4,8; *c)* 9,12; *d)* 5,5; *e)* 4,08;
f) 350,3; *g)* 18,213; *h)* 0,0012; *i)* 50,001; *j)* 22,345.

Rezolvare. *b)* $4,8=\frac{48}{10}$; *i)* $50,001=\frac{50001}{1000}$.

18. Reprezentaţi sub formă de fracţie ordinară fiecare dintre numerele următoare:
a) 0,(1); *b)* 0,(2); *c)* 0,(12); *d)* 0,(125); *e)* 0,(5472);
f) 4,(1); *g)* 2,(34); *h)* 12,(02); *i)* 3,(14); *j)* 11,(234).

Rezolvare. *b)* $0,(2)=\frac{2}{9}$; *d)* $0,(125)=\frac{125}{999}$; *h)* $12,(02)=12\frac{2}{99}=\frac{1190}{99}$.

19. Reprezentaţi sub formă de fracţie ordinară fiecare dintre numerele următoare:
a) 0,0(1); *b)* 0,1(2); *c)* 0,12(1); *d)* 0,23(15); *e)* 1,5(14);
f) 2,2(125); *g)* 5,15(51); *h)* 12,0(12); *i)* 5,52(36); *j)* 253,2(45).

Rezolvare. *c)* $0,12(1)=\frac{121-12}{900}=\frac{109}{990}$;
f) $2,2(125)=2\frac{2125-2}{9990}=2\frac{2123}{9990}=\frac{22103}{9990}$.

20. Daţi câte trei exemple de numere naturale n pentru care fracţia $\frac{12}{n}$ este:
a) supraunitară; *b)* subunitară; *c)* reductibilă; *d)* ireductibilă.

Rezolvare. *c)* $n=8\Rightarrow\frac{12}{8}$ este reductibilă, deoarece se simplifică (de ex. prin 2).

21. Daţi câte trei exemple de numere naturale n pentru care fracţia $\frac{15}{n+1}$ este:
a) supraunitară; *b)* subunitară; *c)* reductibilă; *d)* ireductibilă.

Rezolvare. *d)* $n=1\Rightarrow\frac{15}{1+1}=\frac{15}{2}$ este ireductibilă, deoarece nu se simplifică.

VARIANTE DE SUBIECTE PENTRU TEZĂ

Varianta 1

Subiectul I (4,5 puncte) Pe foaia de teză se va trece numai răspunsul.

1. ***a)*** Rezultatul calculului $9-6:3$ este...

b) Modulul numărul rațional $-\frac{1}{2}$ este egal...

2. ***a)*** Soluția naturală a ecuației $2x+7=19$ este...

b) A patra zecimală a numărului 3,(16) este...

3. Un pătrat și un dreptunghi au perimetrele egale cu 24 cm. Lungimea dreptunghiului este de două ori mai mare decât lățimea.

a) Aria pătratului este egală cu... cm^2;

b) Aria dreptunghiului este egală cu... cm^2.

Subiectul II (4,5 puncte) Pe foaia de teză se vor scrie rezolvările complete.

4. ***a)*** Efectuați: $\left(\frac{2}{3}\right)^6:\left(-\frac{2}{3}\right)^4+\left(6+\frac{3}{2}\cdot 2\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{18}$.

b) Un obiect se ieftinește cu 20%. După ieftinire obiectul costă 160 lei. Aflați prețul inițial al obiectului.

5. În trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$, se cunosc $DC = 8$ cm, $BC = 4$ cm și $m(\sphericalangle B) = 60°$.

a) Calculați lungimea bazei mari, AB.

b) Calculați lungimea liniei mijlocii a trapezului $ABCD$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Varianta 2

Subiectul I (4,5 puncte) Pe foaia de teză se va trece numai răspunsul.

1. ***a)*** Rezultatul calculului $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{4}{2}$ este...

b) Opusul numărului rațional $-1,3$ este numărul...

2. ***a)*** Dintre numerele 3,72 și 3,8, mai mare este numărul...

b) Scris sub formă de fracție zecimală, numărul $-\frac{7}{3}$ este egal cu ... .

3. ***a)*** Aria rombului cu diagonalele de 10 cm și 8 cm este egală cu ... cm^2.